Hydraulique à surface libre

Nota Bene : aucun document autorisé. Durée : 1h45. Ne pas oublier d'inscrire son nom sur les copies. Version 2 post-examen.

Rappels de cours

La perte de charge h_f d'une conduite en charge ou d'un canal à surface libre de longueur L et de diamètre hydraulique D_H est $h_f = L\, f\, \frac{V^2}{2\, g\, D_H}$ où V est la vitesse débitante, g la gravité et f le coefficient de perte de charge. Dans le cas où le Reynolds est grand, ce qui est pratiquement toujours le cas des écoulements à surface libre, la pente de frottement $S_f = h_f/L$ vérifie $V = \frac{1}{n}\, R_H^{2/3}\, \sqrt{S_f}$ où n est le coefficient de Manning et R_H le rayon hydraulique. Lorsque l'écoulement varie brusquement, la perte de charge s'écrit $h_s = K\, \frac{V^2}{2\, g}$ où K est le coefficient de perte de charge singulière.

Pour un écoulement à surface libre de section A, la hauteur critique y_c est atteinte lorsque le nombre de Froude $Fr = \frac{V}{\sqrt{g\, y_H}}$ vaut 1, la hauteur hydraulique $y_H = A/B$ étant définie à partir de la largeur miroir B. Les courbes de remous des régimes stationnaires sont solutions de l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{S_f - S_0}{1 - Fr^2}$ où S_f est la pente de charge et S_0 la pente du fond.

Pour un écoulement à surface libre de section rectangulaire et de profondeur y, la charge spécifique est $E = y + \frac{V^2}{2\, g}$ et l'impulsion est $I = y\, V^2 + \frac{g\, y^2}{2}$. Le tracé de ces fonctions est représenté sur la figure 1.

EXERCICE 0.1 Questions de cours

1. Une rivière possède une section rectangulaire avec une largeur miroir $B = 8$ m et une profondeur $y = 1$ m. Déterminer son rayon hydraulique.
   (a) Son rayon hydraulique est $R_H = 80$ cm.
   (b) Son rayon hydraulique est $R_H = 1$ m.
   (c) Son rayon hydraulique est $R_H = 1,6$ m.
2. Le débit de cette même rivière est $Q = 16$ m$^3/s$. Déterminer la hauteur critique de cet écoulement.
   (a) La hauteur critique y_c est inférieure à 1 m.
   (b) La hauteur critique y_c est égale à 1 m.
   (c) La hauteur critique y_c est supérieure à 1 m.
3. Indiquer dans quel régime se situe cet écoulement.
   (a) L'écoulement est torrentiel.
   (b) L'écoulement est critique.
   (c) L'écoulement est fluvial.

EXERCICE 0.2 Canal de section carrée

On considère un écoulement à surface libre en régime stationnaire et uniforme pour un débit tel que sa section (mouillée) est un carré de côté $C = 3$ m. La pente du fond est $S_0 = 0.01$ et le coefficient de Manning vaut $n = 0.030$. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.

1) Calculer la vitesse V de l'écoulement.

2) L'écoulement est-il torrentiel ou fluvial ?

3) Mêmes questions avec $n = 0.015$.

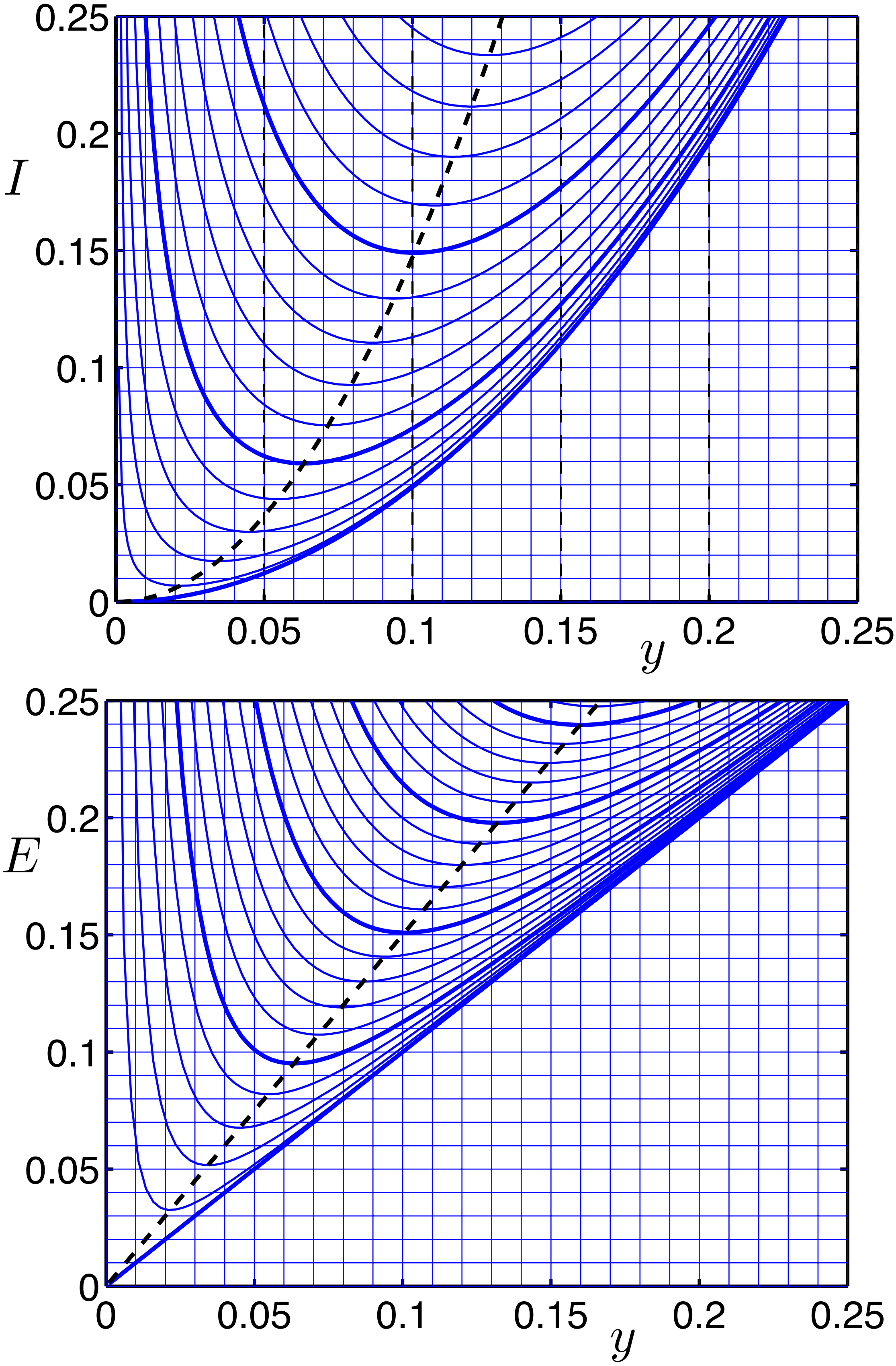

FIGURE 1 – Impulsion I et charge spécifique E en fonction de y pour des valeurs de $q = V\, y$ variant par pas de 0.01 m^2/s.

EXERCICE 0.3 Canal à surface libre alimenté par une pompe

On considère un canal à surface libre de largeur $B = 25$ cm et de longueur $L = 10$ m (figure 2). L'écoulement est alimenté par une pompe qui délivre un débit constant $Q = 25$ l/s dans une conduite en charge de longueur L et de section $D = 20$ cm. On suppose que le coefficient de frottement dans cette conduite est $f = 0.02$, que les coefficients de perte de charge singulière sont égaux à $K = 0.3$ pour chacun des deux coudes, à $K_1 = 0.9$ pour l'élargissement brusque en M_1 et à $K_2 = 0.5$ pour le rétrécissement brusque en M_2.

Dans tout le problème, on suppose que l'on peut négliger le frottement sur les parois latérales du canal à surface libre et que le coefficient de Manning sur le fond de ce canal vaut $n = 0.02$. La masse volumique de l'eau est $\rho = 10^3$ kg/m^3 et la gravité sera prise égale à $g = 10$ m.s^{-2}.

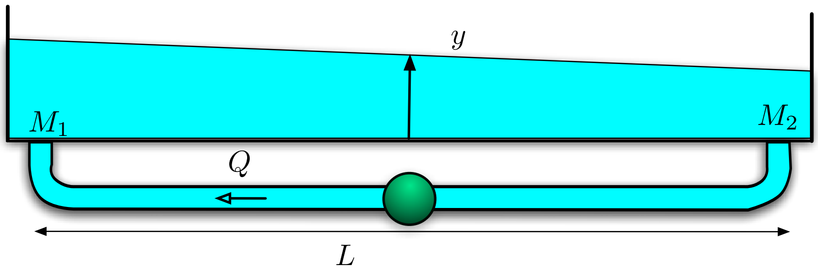

FIGURE 2 – Écoulement dans un canal alimenté par une pompe.

1) Calculer la perte de charge h_{cond} due au frottement dans la conduite en charge (tronçon compris entre M_2 et M_1 à l'exclusion de la pompe) ainsi qu'aux quatre pertes de charge singulières.
2) On suppose que la profondeur moyenne du canal est $y_m = 16$ cm. Estimer, à l'aide des abaques de la figure 1, la valeur de la charge spécifique E en négligeant la variation de hauteur d'eau dans le canal.
3) En approximant la profondeur y par y_m dans tout le canal, calculer la perte de charge h_{canal} entre les points M_1 et M_2.
4) Calculer la perte de charge totale h_{tot} que doit compenser la pompe.
5) En déduire la puissance P délivrée par la pompe.

On suppose maintenant qu'une vanne de fond très proche de l'extrémité amont du canal impose une hauteur $y_G = 5$ cm suivie de très près par un ressaut hydraulique (figure 3). On néglige la perte de charge singulière au passage de la vanne de fond.

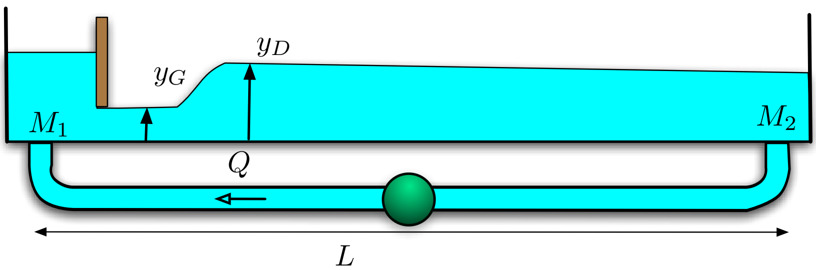

FIGURE 3 – Ressaut stationnaire en aval d'une vanne de fond.

6) Estimer, à partir des abaques de la figure 1, la hauteur y_D à droite du ressaut.
7) Déterminer également la perte de charge singulière h_{ress} à travers le ressaut.
8) Quelle est la perte de charge h_{canal} dans le canal situé à droite du ressaut ?
9) Quelle est maintenant la puissance délivrée par la pompe ?
10) Même question dans le cas où le ressaut est très proche de l'extrémité aval du canal.

Corrigé Questions de cours

1)(a) Comme $A = y\,B = 8$ m^2 et $P = B + 2\,y = 10$ m, on a $R_H = A/P = B\,y/(B+2\,y) = 80$ cm. **2)**(a) Comme y_c est défini par la relation $Q/(\sqrt{g}\;y_c^{3/2}) = 1$ et que $Q/(\sqrt{g}\;y_H^{3/2}) = Fr < 1$, on a $y_c < y_H = 1$ m. **3)**(c) Comme $V = Q/A = 2$ m/s, $y_H = A/B = 1$ m et $c = \sqrt{g\,y_H} = 3.2$ m/s, le nombre de Froude est $Fr = V/c = 0.63 < 1$.

Corrigé Canal de section carrée

1)Comme $A = C^2$ et $P = 3\,C$, on a $R_H = A/P = C/3 = 1$ m. D'où $V = \frac{1}{n}\sqrt{S_0}\,R_H^{2/3} = 3.33$ m/s. **2)**Comme $B = C$, $y_H = A/C = C$, on a $Fr = V/(\sqrt{g\,y_H}) = 0.61 < 1$. L'écoulement est fluvial. **3)**Pour $n = 0.015$, on a $V = 6.66$ m/s et $Fr = 1.23 > 1$. L'écoulement est torrentiel.

Corrigé Canal à surface libre alimenté par une pompe

1)Comme $Q = A\,V = \frac{\pi\,D^2}{4}\,V$, on a $V = \frac{4\,D^2}{\pi}\,Q = 0.8$ m/s dans la conduite en charge. Comme $A_m = B\,y_m$ avec $y_m = 16$ cm dans le canal, on a $V_m = Q/A_m = 0.625$ m/s. En sommant pertes de charge linéique et pertes de charges singulières, on obtient $h_{cond} = f\,L\,\frac{V^2}{2\,g\,D} + (2\,K + K_1)\,\frac{V^2}{2\,g} + K_2\,\frac{V_m^2}{2\,g} = 8.9$ cm. **2)**Le débit linéique est $q = Q/B = 0.1$ m^2/s. Pour $y = 16$ cm, on lit sur l'abaque de l'énergie spécifique la valeur $E = 18$ cm. **3)**La vitesse est approximée par $V = q/y = 0.62$ m/s. On a $S_f = n^2\,V^2/(y^{4/3}) = 1.8\,10^{-3}$. La perte de charge entre M_1 et M_2 est donc $h_{canal} = S_f\,L = 1.8$ cm. **4)**On a $h_{tot} = h_{cond} + h_{canal} = 10.7$ cm. On en déduit que $P = \rho\,g\,h_{tot}\,Q = 26.7$ W. **5)**On lit, sur la figure 1 que la hauteur conjugée de $y_G = 5$ cm pour l'impulsion est $y_D = 17.7$ cm lorsque $q = 0.1$ m^2/s. **6)**On lit, sur la figure 1 que l'énergie spécifique associée à y_G est $E_G = 25$ cm tandis que celle associée à y_D est $E_D = 19.3$ cm. On en déduit un perte de charge singulière $h_{ress} = E_G - E_D = 5.7$ cm. **7)**La pente de frottement dans le canal, à droite du ressaut, est donnée par $S_f = n^2\,V^2/(y^{4/3}) = 1.3\,10^{-3}$. On en déduit une perte de charge dans le canal égale à $h_{canal} = S_f\,L = 1.3$ cm. **8)**La perte de charge totale est donc $h_{tot} = h_{cond} + h_{ress} + h_{canal} = 15.8$ cm. **9)**La puissance délivrée par la pompe est $P = \rho\,g\,h_{tot}\,Q = 39.4$ W. **10)**Dans le cas où le ressaut est en M_2, on a $h_{canal} = 5$ cm en négligeant la variation de hauteur d'eau dans le canal (discutable). On obtient alors $h_{tot} = 1.01$ m et $P = 253$ W. Un calcul plus précis permettrait de prendre en compte la pente de la surface libre.